역진자 카트 시스템 제어

I. 실험목적

이 실험에서는 역진자 카트 시스템을 수학적으로 모델링하고 그로부터 제어기를 설계한다. 그 후 역진자 카트 시스템을 시뮬레이션하여 설계한 제어기를 확인한다.

(1) 실험 절차

이번 실험의 절차는 다음과 같다.

1. 자유 물체도 이해
2. 운동 방정식 찾기/유도
3. 전달 함수 찾기
4. 상태 방정식 찾기
5. PD 제어기 설계
6. 시뮬레이션(Labview 프로그램 이용)
7. 보고서 제출

(2) 이론 및 실험 진행

2.1) 자유물체도

***변수**

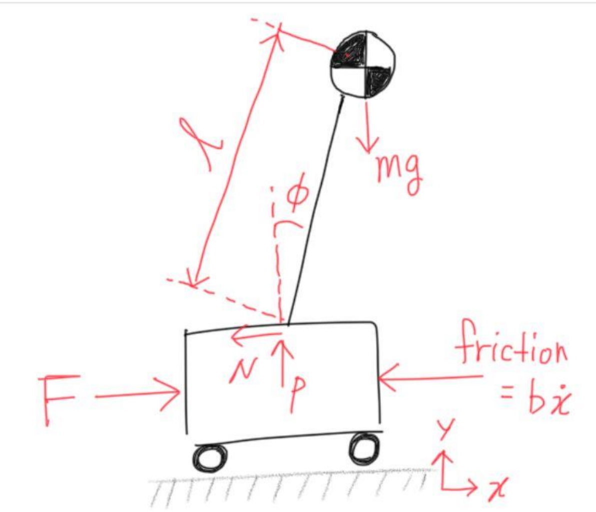


Figure 1. 역진자 카트 시스템 자유 물체도

변수	설명	단위
M	Mass of the cart	kg
m	Mass of the pendulum	kg
b	Friction coefficient for the cart	N/m/s
l	Distance from the axis of rotation to the pendulum mass center	m
I	Mass moment of inertia of the pendulum with respect to the axis of rotation	kg m^2
F	Force applied to the cart	
x	Cart position coordinate	
ϕ	Pendulum angle measured from the vertical axis	

2.2) 운동방정식

수평방향의 힘을 합산하면 아래 식(1)과 같다.

$$M\ddot{x}+b\dot{x}+N=F \tag{1}$$

수평방향에 대한 자유물체도도의 반력 N을 계산하면 식(2)이 된다

$$N=m\ddot{x}+ml\ddot{\phi}\sin\phi-ml\dot{\phi}^2\cos\phi \tag{2}$$

식(1)에 식(2)을 넣으면 다음과 같은 첫 번째 지배방적식을 얻는다.

$$(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}+ml\ddot{\phi}\sin\phi-ml\dot{\phi}^2\cos\phi=F \tag{3}$$

pendulum에 대한 수직방향의 힘을 요약한다. 그러면 다음과 같은 식(4)을 얻는다.

$$P\cos\phi + N\sin\phi - mg\cos\phi = ml\ddot{\phi} + m\ddot{x}\sin\phi \qquad (4)$$

P와 N을 제거하기 위해 정리하면

$$-Pl\cos\phi - Nl\sin\phi = I\ddot{\phi} \qquad (5)$$

식(4)과 식(5)을 더하면 두 번째 지배방정식을 구할 수 있다.

$$(\mathrm{I}+\mathrm{ml}^2)\ddot{\phi} + \mathrm{mglcos}\phi = -\mathrm{ml}\ddot{\mathrm{x}}\sin\phi \qquad (6)$$

이 제어 설계기법은 선형시스템에만 적용이 되기 때문에 방정식을 선형화할 필요가 있다.
수직 상향 평형위치를 선형화하면 ϕ=π, 그리고 이 시스템은 작은 구간에서 유지된다고 가정한다.
수직 상향 평형위치가 20°를 넘지 않으면 이 가정은 상당히 합리적이다. 다음 아래 식(7)과 같다.

$$\begin{aligned} &\sin\phi \approx \phi \\ &\cos\phi \approx 1 \\ &\dot{\phi}^2 \approx 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

다음으로 비선형 방정식에 위의 식을 넣으면 두 개의 선형방정식이 나오고 F를 input으로 놓으면 u값을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}+ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x} \\ &(M+m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u = F \end{aligned} \qquad (8)$$

2.2) 전달함수

전달함수 : 라플라스 변환법에 의한 자동 제어계의 해석에 있어서 중요한 의미를 갖는 함수로, 제어계의 각 요소 또는 그 결합된 것의 응답을 나타내고, 일반적으로 모든 초기값을 0으로 할 때의 출력 신호와 입력 신호의 라플라스 변환의 비로 정의된다.

$$T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

.

선형방정식의 전달함수를 얻기 위해서, 초기조건을 가정하고 Laplace변환을 아래 식(9), 식(10)과 같이 수행한다.

$$(\mathrm{I}+\mathrm{ml}^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) = mlX(s)s^2 \qquad (9)$$

$$(M+m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \qquad (10)$$

Output Φ (s)과 InputU(s)에서 전달함수를 찾기 위해서 X(s)를 제거해야 한다. X(s)에 대해 정리하면,

$$X(s) = \left[\frac{I+ml^2}{ml} - \frac{g}{s^2}\right]\Phi(s) \qquad (11)$$

.이 된다. 식(11)을 식(10)에 대입을 하면 아래 식(12)와 같고

$$(M+m)\left[\frac{I+ml^2}{ml}-\frac{g}{s^2}\right]\Phi(s)s^2+b\left[\frac{I+ml^2}{ml}-\frac{g}{s^2}\right]\Phi(s)s-ml\Phi(s)s^2=U(s) \tag{12}$$

식(12)을 정리하면

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)}=\frac{\frac{ml}{q}s^2}{s^4+\frac{b(I+ml^2)}{q}s^3-\frac{(M+m)mgl}{q}s^2-\frac{bmgl}{q}s} \tag{13}$$

여기서,

$$q=[(M+m)(I+ml^2)-(ml)^2] \tag{14}$$

위의 식(13)을 보면, 원점에 pole과 zero가 겹쳐있으므로 약분하면 전달함수 식(15)와 같다.

$$T_{pend}(\mathrm{s})=\frac{\Phi(s)}{U(s)}=\frac{\frac{ml}{q}s}{s^3+\frac{b(I+ml^2)}{q}s^3-\frac{(\mathrm{M+m})\,\mathrm{mgl}}{q}s^2-\frac{bmgl}{q}s}\quad[\frac{rad}{N}] \tag{15}$$

식(15)를 구한 방식과 같은 방식으로 식(9),(10)으로 부터 전달함수 식(16)을 구할 수 있다.

$$T_{cart}(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{\frac{(I+ml^2)s^2-gml}{q}}{s^4+\frac{b(I+ml^2)}{q}s^3-\frac{(M+m)mgl}{q}s^2-\frac{bmgl}{q}s}\quad[\frac{m}{N}] \tag{16}$$

2.3) 상태방정식(state-space)

미분방정식이 연속적이라면 이 운동선형방정식들은 state-place로 대체가 가능하다.
위 방정식들은 선형이기 때문에 아래와 같은 표준행렬로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\phi}\\ \ddot{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \phi\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2}\\ 0\\ \frac{ml}{I(M+m)+Mml^2}\end{bmatrix}u \tag{17}$$

$$Y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \phi\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}u$$

2.4) 제어기 설계하기

식(17)을 간단히 표현하면 식(18)과 같다.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu \\ Y &= CX + Du\end{aligned} \qquad \text{여기서, } X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix}, u = [F] \tag{18}$$

식(18)에서 입력값 u에 식(19)를 대입한다. 식(19)에서 K는 제어상수이며 제어상수에 따라 시스템의 안정성이 좌우된다. K는 식(20)과 같다.

$$u = -KX = -(\mathrm{k}_{p1}\, x + \mathrm{k}_{d1}\, \dot{x} + k_{p2}\phi + \mathrm{k}_{d2}\, \dot{\phi}) \tag{19}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{p1} \\ k_{d1} \\ k_{p2} \\ k_{d2} \end{bmatrix} \tag{20}$$

여기서 k_{p1}, k_{d1}은 각각 카트의 위치와 속도에 대한 제어상수이며, k_{p2}, k_{d2}는 각각 진자의 각도와 각속도에 대한 제어상수이다. 식(18)의 상태방정식에 식(19)를 대입하여 정리하면 상태방정식(18)은 식(21)과 같다.

$$\dot{X} = (A - BK)X \tag{21}$$

식(21)에서 (A-BK)가 negative definite이면 시스템은 안정하다. 다시 말해 제어상수 K를 사용하였을 때 진자가 쓰러지지 않고 안정하게 서있는다. (A-BK)가 negative definite인지 확인하는 방법은 (A-BK)의 고유값을 구하여 이 값이 모두 음수이면 (A-BK)은 negative definite이다. 3x3행렬부터는 고유값을 손으로 구하기 어려우므로 컴퓨터를 이용하여 계산한다.
고유값은 시스템의 안정성 및 수렴속도와 관련 있다. Eigen value의 절대값이 클수록 시스템이 빨리 안정화된다. 만약 Eigen value가 복소수이면 시스템에 진동이 발생한다.
(Root locus 상에서의 pole, zero 위치와 시스템응답과의 관계 참조; 자세한 점은 시스템 제어 서적 참조)

2.5) 시뮬레이션

역진자 카트 시스템 시뮬레이션은 랩뷰(Labview)프로그램으로 진행한다. LabVIEW는 테스트, 컨트롤 및 측정 어플리케이션을 개발하는 엔지니어와 과학자들을 위해 National Instrument사에서 제작한 그래픽 기반 프로그래밍 언어이다. 이 실험에서는 역진자 카트 시스템 시뮬레이션을 위해 다음의 파일을 활용한다. (파일 위치: 바탕화면>"pendulum control Labview application"폴더)

1. "Inverted pendulum Application.exe" 시뮬레이션 진행
2. "Controller design from state space Application.exe" 설계

1. Inverted pendulum Application 파일

Inverted pendulum Application 파일을 실행하면 아래의 창이 뜨며 각 요소에 대한 설명은 Figure 2와 같다.

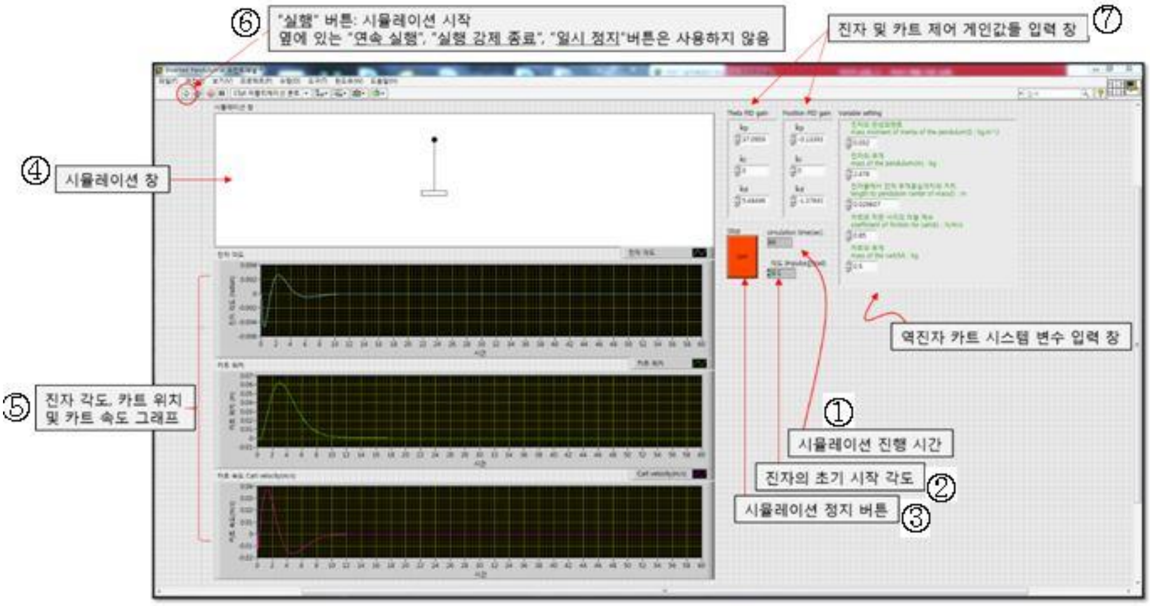


Figure 2. Inverted pendulum Application 역진자 카트 시뮬레이션 창

먼저, "<u>시스템 변수 입력창</u>"에 역진자 카트의 변수를 입력한다. 각 변수 값들은 다음의 범위 내에서 선정한다.

진자의 무게 m (kg)	회전축으로부터 진자 무게 중심까지 거리 l (m)	마찰계수 b	카트 무게 M (kg)
0.1~2	0.1~1	0.1~0.5	0.1~5

진자의 관성 모멘트는 진자의 회전축으로부터 진자의 무게중심점에 대하여 계산된 막대기의 관성 모멘트 식(22)으로부터 구한다.

$$I = ml^2 \tag{22}$$

여기서 선정한 변수들과 식(17)로부터 역진자 카트 시스템의 상태방정식을 구할 수 있다.

1. <u>시뮬레이션 진행 시간</u> : 인디케이터는 시뮬레이션이 진행된 시간을 보여준다. 시뮬레이션의 진행 시간은 60초이다.

2. <u>진자의 초기 시작 각도 </u>: 시뮬레이션이 시작할 때 진자가 기울어져있는 각도이다. 이 값이 0이면 시뮬레이션이 진행되지 않으므로 0.1~1 범위 내에서 선정한다.

3. <u>시뮬레이션 정지 버튼</u> : 시뮬레이션이 진행 중에 끝내고 싶을 때 누르면 된다. 이 버튼을 누르지 않아도 시뮬레이션이 시작되고 60초가 지나면(여기서 60초는 실제 시간이 아닌 시뮬레이션상의 60초) 자동으로 시뮬레이션은 끝난다.

4. <u>시뮬레이션 창 </u>= 역진자 카트의 움직임을 보여준다.

5. <u>진자 각도, 카트 위치, 카트 속도 그래프</u> : 진자의 각도와 카트의 움직인 거리 및 카트의 속도 변화를 보여준

다.

6. <u>실행 버튼</u> : 시뮬레이션에 필요한 변수들과 제어상수를 모두 입력한 후 시뮬레이션을 실행하고자 할 때 클릭한다.

7. <u>진자 및 카트 제어 게인 입력 창</u> : 역진자의 각도와 카트 위치를 제어하기 위한 제어 상수를 입력한다. 이 제어 상수의 설계 여부에 따라 시스템의 안정성이 좌우된다. 제어 상수를 설계하기 위해 "Controller design from state space Application" 파일을 사용하자.

2. Controller design from state space Application 파일

Controller design from state space Application 파일을 실행하면 와 같은 창이 뜬다.

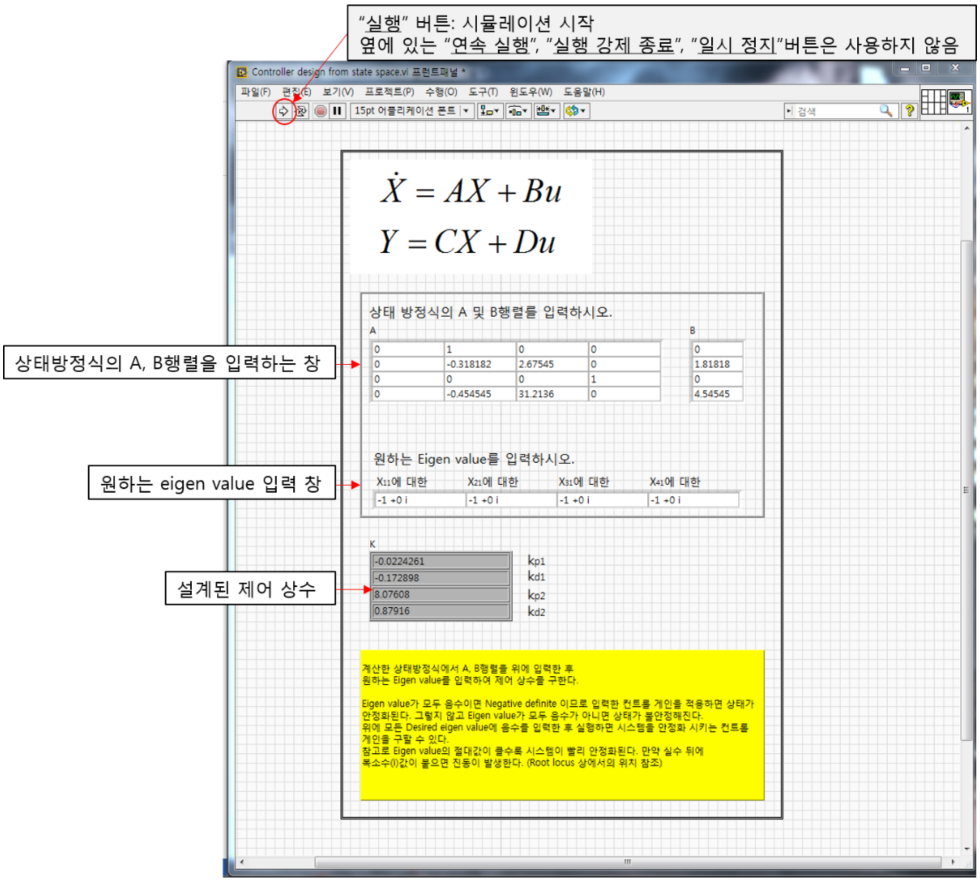


Figure 3. Controller design from state space Application 창

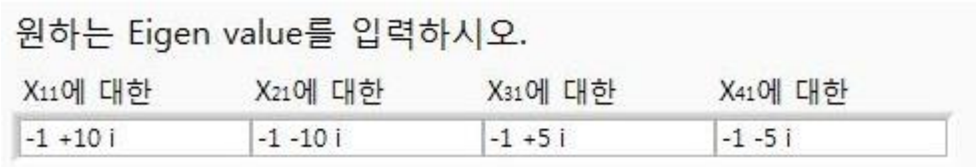
먼저, 위에서 선정한 변수들과 식(17)을 이용하여 구한 상태방정식의 A, B행렬을 exe파일의 "<u>상태방정식의 A, B행렬을 입력하는 창</u>"에 입력한다.

다음으로 원하는 eigen value를 "<u>원하는 eigen value 입력 창</u>"에 입력한다. 모든 eigen value가 음수여야 시스템이 안정화된다. 각각의 eigen value는 상태방정식의 X행렬의 원소들과 관련이 있다(식(17),(18)참조). Eigen value의 절대값이 커질수록 관련된 X행렬의 원소는 빨리 안정화된다. 예를 들어, X_{31}원소와 관련된 eigen value의 절대값이 커지면 X_{31}원소 즉 역진자의 각도는 다른 원소들에 비해 빨리 안정화된다. 만약 Eigen value를 실수가 아닌 복소수로 입력하면 시스템에 진동이 생긴다. Table.1은 eigen value의 실수와 복소수 형태의 예시이다. (Eigen value에 대한 더 자세한 내용은 공업수학책이나 인터넷 자료 참조)

Table 1. Eigen value 실수

]

Eigen value 복소수



상태방정식의 A, B행렬과 Eigen value까지 모두 입력한 후 "실행 버튼"을 클릭하여 프로그램을 실행한다. "설계된 제어 상수 창"에 설계된 제어 상수들이 출력된다. 이 제어 상수들을 시뮬레이션 창(Figure 2)의 "진자 및 카트 제어 게인값들 입력 창"에 입력한 후 시뮬레이션 창의 "실행 버튼"을 클릭하여 시뮬레이션을 실행한다.

여기서, Kp1은 카트위치(x), Kd1는 카트의 속도(x'), Kp2는 진자의 각도(θ), Kd2진자의 각속도(θ')에 대한 제어 상수이다.

시뮬레이션을 수행하고 보고서를 제출한다.

(3) 참조문헌

1. http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=SystemModeling

실험일자:__________ 학번:____________________ 반: ______성명: __________________________

※ 실험 결과

1. 역진자 카트 시스템의 상태방정식

- 시뮬레이션을 위해 선정한 값은 기입하시오.

카트 무게M (kg)	진자 무게m (kg)	지면 마찰계수b	회전축으로부터 진자 무게 중심까지의 거리 l (m)	초기 진자 각도θ(rad)

- 위 물리변수로부터 구한 역진자 카트 시스템의 상태방정식을 식(17)을 대입하여 표현하시오.

2. Labview 프로그램에서 제어 상수(k_p, k_d) 또는 Eigen value값을 변화시키며 진자와 카트의 움직임을 관찰하고 아래 표를 작성하시오. (hint : ϕ부호변화)

(k_p, k_d값의 작은 변화는 제어 결과의 차이가 미비하므로, 값을 크게 변화시키며 실험을 진행할 것)

<table>
<tr><th></th><th colspan="4">k_p, k_d값</th><th>진자의 정지 시간(s)</th><th>총 진자 운동 횟수</th><th>카트가 원점으로부터 이동한 최대 위치(x_{max}) 및 카트의 최대속도(v_{max})</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1차</td><td>k_{p1}</td><td></td><td>k_{d1}</td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>k_{p2}</td><td></td><td>k_{d2}</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">Eigen values =</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2차</td><td>k_{p1}</td><td></td><td>k_{d1}</td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>k_{p2}</td><td></td><td>k_{d2}</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">Eigen values =</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3차</td><td>k_{p1}</td><td></td><td>k_{d1}</td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>k_{p2}</td><td></td><td>k_{d2}</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">Eigen values =</td></tr>
</table>

3. 각 실험에서 제어 상수의 변화에 따라 진자 정지시간, 왕복 횟수, 카트 이동거리 및 속도가 어떻게 변하는지 설명하라.

3. 지금까지 실험한 결과를 볼 때, 카트의 최대 속도를 감소시키기 위해서는 eigenvalue의 절대값을 증가시켜야 되는가? 감소시켜야 되는가?