역진자 카트 시스템 제어 (Control of an inverted pendulum-cart system)

I. 실험목적

이 실험에서는 아래 그림과 같이 진자(pendulum) 역할을 하는 바(bar)와 모바일 로봇(mobile robot)으로 구성된 역진자 카트 (inverted pendulum-cart) 시스템을 수학적으로 모델링하고 역진자 상태를 유지시킬 수 있는 제어기를 설계한다. 그리고 시뮬레이션을 통하여 설계한 제어기를 확인한다. 참고로 역진자 카트를 제어하지 않는 경우는 Figure 1. (a-b)와 같이 진자를 잡아 주지 않으면 쓰러진다. 하지만 모바일 로봇을 적절히 제어하면 Figure 1. (c)와 같이 역진자 상태를 안정적으로 유지할 수 있다.

(a) 제어하지 않는 경우 (b) 제어하지 않는 경우 (역진자 쓰러짐) (c) 제어하는 경우

Figure 1. 역진자 카트 시스템 (Inverted pendulum-cart system)

(1) 실험 절차

이번 실험의 절차는 다음과 같다.

1. 자유 물체도 이해
2. 운동 방정식 찾기/유도
3. 전달 함수 찾기
4. 상태 방정식 찾기
5. PD 제어기 설계
6. 시뮬레이션(Labview 프로그램 이용)
7. 보고서 제출

(2) 이론 및 실험 진행

2.1) 자유물체도

***변수**

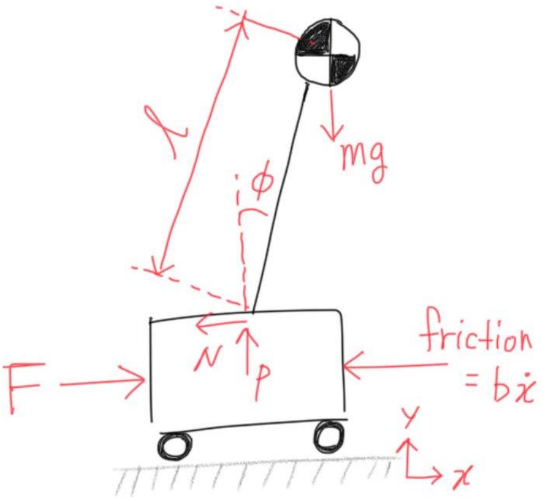


Figure 2. 역진자 카트 시스템 자유 물체도 (Free-body diagram of an inverted pendulum-cart system)

변수	설명	단위
M	Mass of the cart	kg
m	Mass of the pendulum	kg
b	Friction coefficient for the cart	N/m/s
l	Distance from the axis of rotation to the pendulum mass center	m
I	Mass moment of inertia of the pendulum with respect to the axis of rotation	kg m^2
F	Force applied to the cart	
x	Cart position coordinate	
ϕ	Pendulum angle measured from the vertical axis	

2.2) 운동방정식

수평방향의 힘을 합산하면 아래 식(1)과 같다.

$$M\ddot{x}+b\dot{x}+N=F \tag{1}$$

수평방향에 대한 자유물체도도의 반력 N을 계산하면 식(2)이 된다

$$N=m\ddot{x}+ml\ddot{\phi}\sin\phi-ml\dot{\phi}^2\cos\phi \tag{2}$$

식(1)에 식(2)을 넣으면 다음과 같은 첫 번째 지배방적식을 얻는다.

$$(M+m)\ddot{x}+b\dot{x}+ml\ddot{\phi}\sin\phi-ml\dot{\phi}^2\cos\phi=F \tag{3}$$

pendulum에 대한 수직방향의 힘을 요약한다. 그러면 다음과 같은 식(4)을 얻는다.

$$P\cos\phi+N\sin\phi-mg\cos\phi=ml\ddot{\phi}+m\ddot{x}\sin\phi \tag{4}$$

P와 N을 제거하기 위해 정리하면

$$-Pl\cos\phi - Nl\sin\phi = I\ddot{\phi} \tag{5}$$

식(4)과 식(5)을 더하면 두 번째 지배방정식을 구할 수 있다.

$$(\mathrm{I}+\mathrm{ml}^2)\ddot{\phi} + \mathrm{mglcos}\,\phi = -\mathrm{ml}\ddot{\mathrm{x}}\sin\phi \tag{6}$$

이 제어 설계기법은 선형시스템에만 적용이 되기 때문에 방정식을 선형화할 필요가 있다.
수직 상향 평형위치를 선형화하면 ϕ=π, 그리고 이 시스템은 작은 구간에서 유지된다고 가정한다.
수직 상향 평형위치가 20°를 넘지 않으면 이 가정은 상당히 합리적이다. 다음 아래 식(7)과 같다.

$$\begin{aligned} &\sin\phi \approx \phi \\ &\cos\phi \approx 1 \\ &\dot{\phi}^2 \approx 0 \end{aligned} \tag{7}$$

다음으로 비선형 방정식에 위의 식을 넣으면 두 개의 선형방정식이 나오고 F를 input으로 놓으면 u값을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}+ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x} \\ &(M+m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u = F \end{aligned} \tag{8}$$

2.2) 전달함수

전달함수 : 라플라스 변환법에 의한 자동 제어계의 해석에 있어서 중요한 의미를 갖는 함수로, 제어계의 각 요소 또는 그 결합된 것의 응답을 나타내고, 일반적으로 모든 초기값을 0으로 할 때의 출력 신호와 입력 신호의 라플라스 변환의 비로 정의된다.

$$T(s) = \frac{Y(\mathrm{s})}{U(s)}$$

.

선형방정식의 전달함수를 얻기 위해서, 초기조건을 가정하고 Laplace변환을 아래 식(9), 식(10)과 같이 수행한다.

$$(\mathrm{I}+\mathrm{ml}^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) = mlX(s)s^2 \tag{9}$$

$$(M+m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \tag{10}$$

Output Φ (s)과 InputU(s)에서 전달함수를 찾기 위해서 X(s)를 제거해야 한다. X(s)에 대해 정리하면,

$$X(s) = \left[\frac{I+ml^2}{ml} - \frac{g}{s^2}\right]\Phi(s) \tag{11}$$

.이 된다. 식(11)을 식(10)에 대입을 하면 아래 식(12)와 같고

$$(M+m)\left[\frac{I+ml^2}{ml}-\frac{g}{s^2}\right]\Phi(s)s^2+b\left[\frac{I+ml^2}{ml}-\frac{g}{s^2}\right]\Phi(s)s-ml\Phi(s)s^2=U(s) \tag{12}$$

식(12)을 정리하면

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)}=\frac{\frac{ml}{q}s^2}{s^4+\frac{b(I+ml^2)}{q}s^3-\frac{(M+m)mgl}{q}s^2-\frac{bmgl}{q}s} \tag{13}$$

여기서,

$$q=[(M+m)(I+ml^2)-(ml)^2] \tag{14}$$

위의 식(13)을 보면, 원점에 pole과 zero가 겹쳐있으므로 약분하면 전달함수 식(15)와 같다.

$$T_{pend}(\mathrm{s})=\frac{\Phi(s)}{U(s)}=\frac{\frac{ml}{q}s}{s^3+\frac{b(I+ml^2)}{q}s^3-\frac{(\mathrm{M+m})\,\mathrm{mgl}}{q}s^2-\frac{bmgl}{q}s} \quad [\frac{rad}{N}] \tag{15}$$

식(15)를 구한 방식과 같은 방식으로 식(9),(10)으로 부터 전달함수 식(16)을 구할 수 있다.

$$T_{cart}(s)=\frac{X(s)}{U(s)}=\frac{\frac{(I+ml^2)s^2-gml}{q}}{s^4+\frac{b(I+ml^2)}{q}s^3-\frac{(M+m)mgl}{q}s^2-\frac{bmgl}{q}s} \quad [\frac{m}{N}] \tag{16}$$

2.3) 상태방정식(state-space)

위 방정식들은 선형이기 때문에 아래와 같은 state-space form으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\phi}\\ \ddot{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{-(I+ml^2)b}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{-mlb}{I(M+m)+Mml^2} & \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \phi\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2}\\ 0\\ \frac{ml}{I(M+m)+Mml^2}\end{bmatrix}u \tag{17}$$

$$Y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \phi\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}u$$

2.4) 제어기 설계하기

식(17)을 간단히 표현하면 식(18)과 같다.

$$\dot{X} = AX + Bu \qquad \text{여기서}, \; X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix}, u = [F] \tag{18}$$
$$Y = CX + Du$$

식(18)에서 입력값 u에 식(19)를 대입한다. 식(19)에서 K는 제어상수이며 제어상수에 따라 시스템의 안정성이 좌우된다. K는 식(20)과 같다.

$$u = -KX = -(\mathrm{k}_{p1}\, x + \mathrm{k}_{d1}\, \dot{x} + k_{p2}\phi + \mathrm{k}_{d2}\, \dot{\phi}) \tag{19}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{p1} \\ k_{d1} \\ k_{p2} \\ k_{d2} \end{bmatrix} \tag{20}$$

여기서 k_{p1}, k_{d1}은 각각 카트의 위치와 속도에 대한 제어상수이며, k_{p2}, k_{d2}는 각각 진자의 각도와 각속도에 대한 제어상수이다. 식(18)의 상태방정식에 식(19)를 대입하여 정리하면 상태방정식(18)은 식(21)과 같다.

$$\dot{X} = (A - BK)X \tag{21}$$

식(21)에서 (A-BK)가 negative definite이면 시스템은 안정하다. 다시 말해 제어상수 K를 사용하였을 때 진자가 쓰러지지 않고 안정하게 서있는다. (A-BK)가 negative definite인지 확인하는 방법은 (A-BK)의 고유값을 구하여 이 값이 모두 음수이면 (A-BK)은 negative definite이다. 3x3행렬부터는 고유값을 손으로 구하기 어려우므로 컴퓨터를 이용하여 계산한다.
고유값은 시스템의 안정성 및 수렴속도와 관련 있다. Eigen value의 절대값이 클수록 시스템이 빨리 안정화된다. 만약 Eigen value가 복소수이면 시스템에 진동이 발생한다.
(Root locus 상에서의 pole, zero 위치와 시스템응답과의 관계 참조; 자세한 점은 시스템 제어 서적 참조)

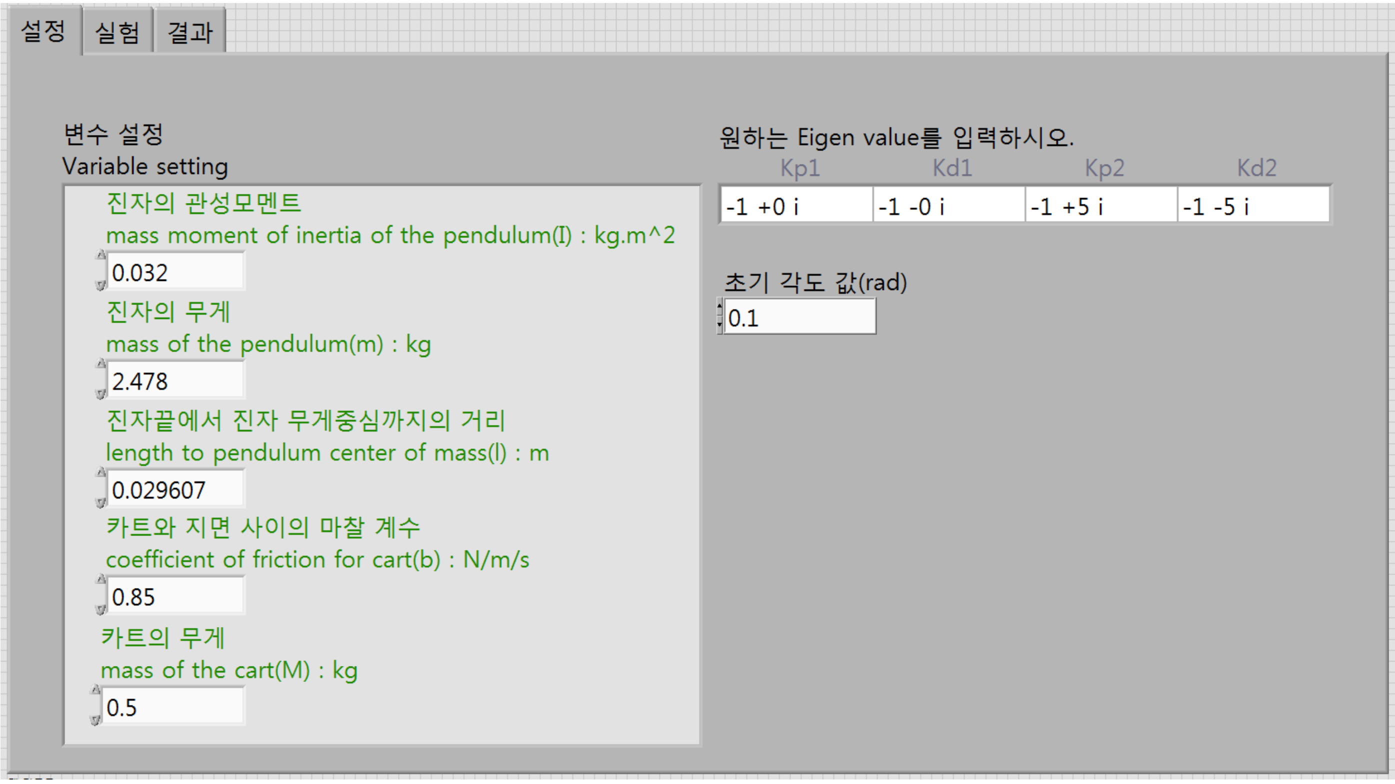
2.5) 시뮬레이션

역진자 카트 시스템 시뮬레이션은 랩뷰(Labview)프로그램으로 진행한다. LabVIEW는 테스트, 컨트롤 및 측정 어플리케이션을 개발하는 엔지니어와 과학자들을 위해 National Instrument사에서 제작한 그래픽 기반 프로그래밍 언어이다. 이 실험에서는 제공된 시뮬레이션 파일로 역진자 카트 시스템 시뮬레이션을 진행한다. 참고로 시뮬레이션 설치 화일은 http://robot.hanbat.ac.kr/index.php/lecture/mech-lab/ 에서 다운로드 받을 수 있다.

- Inverted pendulum Application 파일

제공된 설치파일을 설치 후 <u>설치 경로</u>에 들어가면 Application 파일이 있다. 이 Application 파일을 실행하면 아래의 창이 뜨며 “설정”, “실험”, “결과” 탭을 순서대로 설정하여 시뮬레이션을 진행한다.

A. "설정" 탭



설정 탭에서는 1)역진자 시스템의 변수들과 2)제어계수를 계산하는데 필요한 eigen 값들 그리고 3)역진자의 초기 각도 설정해준다.

- **변수 설정**

먼저, "변수 설정"에 역진자 카트의 변수를 입력한다. 각 변수 값들은 Table 1을 참조한다.
진자의 관성 모멘트는 진자의 회전축으로부터 진자의 무게중심점에 대하여 계산된 막대기의 관성 모멘트 식(22)으로부터 구한다.

$$I = ml^2 \tag{22}$$

- **Eigen value 입력**

다음으로 원하는 eigen value를 '원하는 eigen value 입력' 창에 입력한다. 모든 eigen value가 **음수(-)**가 되여야 역진자 시스템이 안정화된다. 각각의 eigen value는 상태방정식의 X행렬의 원소들과 관련이 있다(식(17),(18)참조).

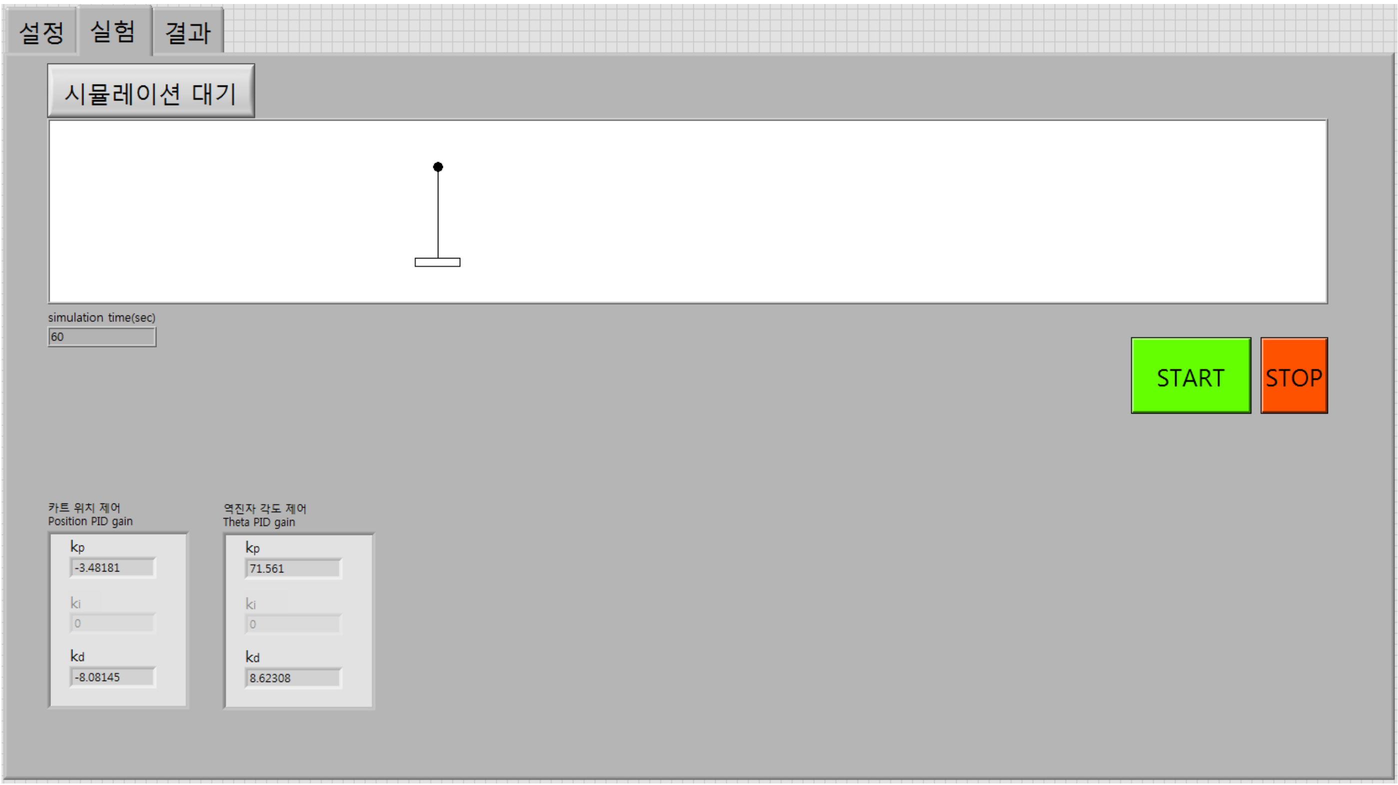
Eigen value의 실수 크기가 커질수록 관련된 X행렬의 원소는 빨리 안정화된다. 예를 들어, 식(18)에서 X_{31}원소와 관련된 eigen value의 절대값이 커지면 X_{31}원소 즉 역진자의 각도는 다른 원소들에 비해 빨리 안정화된다. **여기서, Kp1은 카트위치(x), Kd1는 카트의 속도(x'), Kp2는 진자의 각도(θ), Kd2진자의 각속도(θ')에 대한 제어 상수이다.**

만약 Eigen value를 실수가 아닌 복소수로 입력하면 시스템에 진동이 생긴다(Eigen value에 대한 더 자세한 내용은 공업수학책이나 인터넷 자료 참조). Eigen value를 복소수로 입력 시 kp와 kd는 켤레복소수여야 한다. 즉 kp, pd의 복소수는 크기가 같고 부호가 반대여야 한다. (ex: kp1=-1+1i, kd1=-1-1i)

- **역진자의 초기 각도**

시뮬레이션이 시작할 때 진자가 기울어져있는 각도이다. 이 값이 0이면 시뮬레이션이 진행되지 않는다.

B. "실험"탭



- 시뮬레이션 창 = 역진자 카트의 움직임을 보여준다.

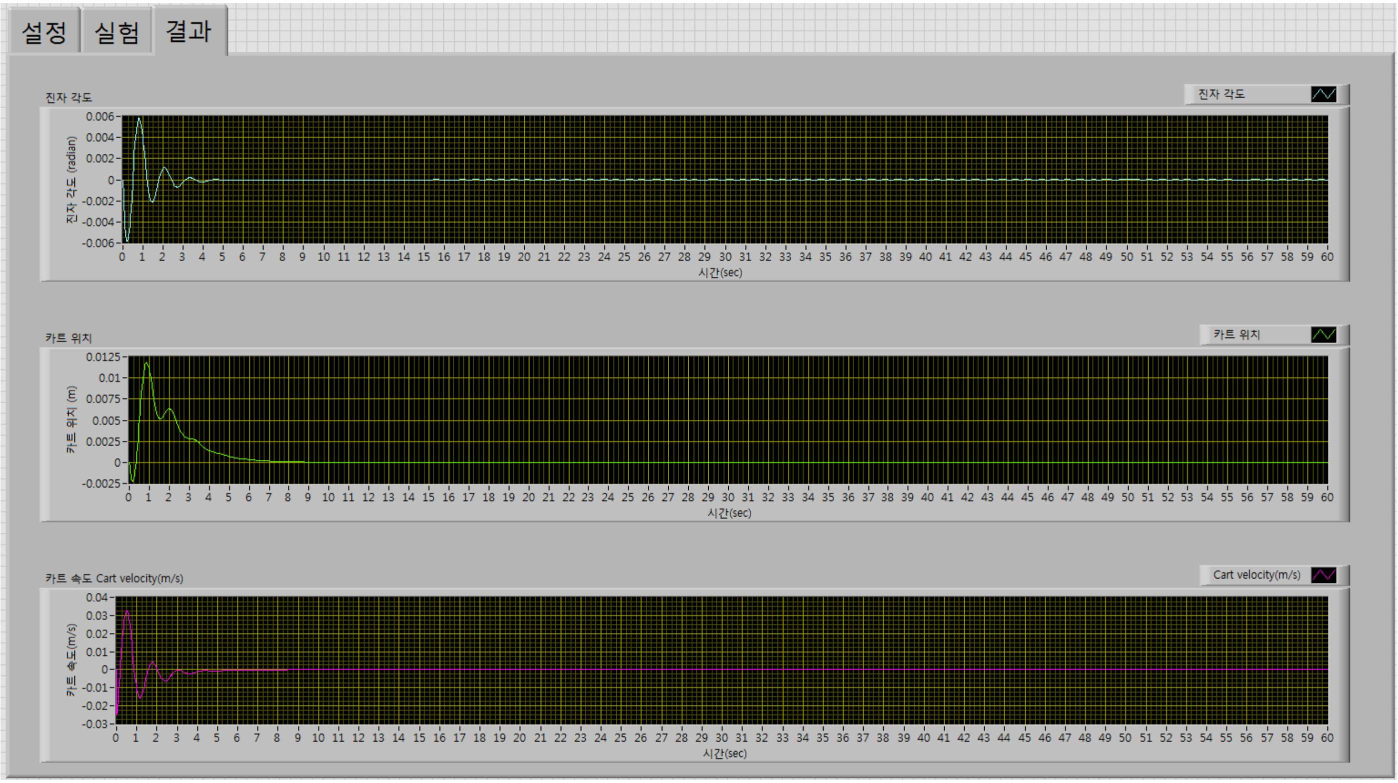
- 시뮬레이션 진행 시간 : 인디케이터는 시뮬레이션이 진행된 시간을 보여준다. 시뮬레이션의 진행 시간은 60초이다.

- START 버튼 : 시뮬레이션 시작 버튼

- STOP 버튼 : 시뮬레이션이 진행 중에 끝내고 싶을 때 누르면 된다. 이 버튼을 누르지 않아도 시뮬레이션이 시작되고 60초가 지나면(여기서 60초는 실제 시간이 아닌 시뮬레이션상의 60초) 자동으로 시뮬레이션은 끝난다.

- 제어 게인(gain) : 앞에 "설정"탭에서 입력한 변수와 eigen 값을 사용하여 계산된 제어 상수들

C. “결과”탭



- <u>진자 각도, 카트 위치, 카트 속도 그래프</u> : 진자의 각도와 카트의 움직인 거리 및 카트의 속도 변화를 보여준다.

시뮬레이션을 수행하고 보고서를 제출한다.

(3) 참조문헌

1. http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=SystemModeling

Table 1 실험용 계수들

팀/조	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
진자의 무게 m (kg)	0.1	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5
회전축으로부터 진자 무게 중심까지 거리 l (m)	0.1	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5
카트 무게 M (kg)	0.1	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5
초기각도(rad)	0.95	0.9	0.85	0.8	0.75	0.7	0.65	0.6	0.55	0.5	0.45	0.4	0.35	0.3	0.25	0.2	0.15	0.1	0.05	0.01
마찰계수 b	0.1																			
Eigen values	-1, -1, -1, -1 (which is associated with control gains Kp1, Kd1, Kp2, Kd2)																			

실험 보고서

실험일자:________년_____월_____일 학번:_____________________ 반/팀: __________성명: ________________________

1. 시뮬레이션을 위해 사용한 파라미터(parameter) 값을 입력하시오. (Table 1 참조)

카트 무게 M (kg)	진자 무게 m (kg)	지면 마찰계수 b	회전축으로부터 진자 무게 중심까지의 거리 l (m)	초기 진자 각도 θ(rad)

2. 위 파라미터를 식(17)에 대입하여 역진자 카트 시스템의 상태방정식을 표현하시오.

3. Labview 프로그램에서 시스템 변수들과 Eigen value값을 변화시키며 진자와 카트의 움직임을 관찰하고 아래 표를 작성하시오. 단, 2차 시 eigen value를 1차 때보다 10배 크게 변화시켜 실험을 진행하고, 3차 시 eigen value를 1차 때보다 0.2배 작게 변화시켜 실험을 진행할 것.

<table>
<tr><th></th><th colspan="4">k_p, k_d값</th><th>진자의 정지 시간(s)</th><th>총 진자 진동 횟수</th><th>카트가 원점으로부터 이동한 최대 위치 (x_{max}) 및 카트의 최대속도 (v_{max}): 절대값 고려, 부호는 좌표의 방향(왼쪽/오른쪽) 표시함</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1차</td><td>k_{p1}</td><td></td><td>k_{d1}</td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>k_{p2}</td><td></td><td>k_{d2}</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">Eigen values =</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2차</td><td>k_{p1}</td><td></td><td>k_{d1}</td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>k_{p2}</td><td></td><td>k_{d2}</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">Eigen values =</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3차</td><td>k_{p1}</td><td></td><td>k_{d1}</td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>k_{p2}</td><td></td><td>k_{d2}</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">Eigen values =</td></tr>
</table>

4. Eigen value의 Kp2, Kd2복소수부를 자신의 조 번호 숫자만큼의 크기로 설정하고 시뮬레이션하였을 때 결과가 어떻게 변하는지 확인하고 설명하라. (주의, 켤레 복소수로 입력해야 함 즉 크기는 같고 부호는 반대여야 함)

5. 지금까지 진행한 결과를 바탕으로 eigen value의 변화에 따라, 제어 상수가 어떻게 변하는지 그리고 진자 정지시간, 왕복 횟수, 카트 이동거리 및 속도가 어떻게 변하는지 상관 관계를 논의하라.