진자 카트 시스템 제어 (Control of a pendulum-cart system)

I. 실험목적

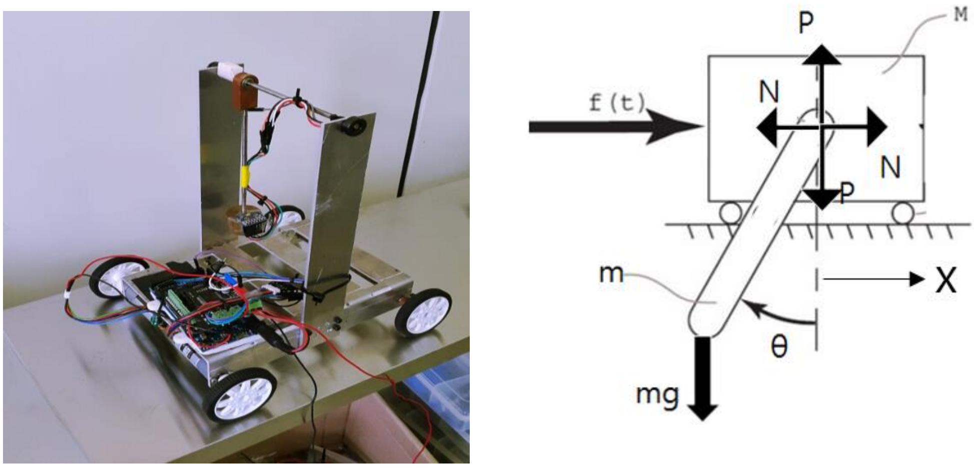
이 실험에서는 진자와 모바일 로봇으로 구성된 진자 카트 시스템을 수학적으로 모델링하고 진자의 운동을 빠르게 감쇠시키는 제어기를 설계한다. 그리고 시뮬레이션을 통해 설계한 제어기를 확인한다.

(1) 실험절차

이번 실험의 절차는 다음과 같다.

1. 자유 물체도 이해
2. 운동 방정식 유도
3. 상태 방정식 찾기
4. PD 제어기 설계
5. 시뮬레이션(Labview 프로그램이용)
6. 보고서 제출

(2) 이론 및 실험 진행



(a) 진자 카트 시스템 **(b) 자유물체도**

Figure 1. 진자 카트 시스템 자유 물체도

2.1 자유 물체도 이해.

Figure 1은 실제 진자 카트 시스템과 자유물체도이다. 그리고 Table 1은 진자 카트의 파라미터를 보여준다.

Table 1. 진자 카트 파라미터

변수	설명	단위
M	Mass of the cart	kg
m	Mass of the pendulum	kg
b	Coefficient of friction for pendulum	
l	Half-length of pendulum	m
I	Mass moment of inertia of the pendulum	Kg*m^2
F	Force applied to the cart	N
X	Cart position coordinate	m
θ	Pendulum angle from vertical	Rad
g	Gravity	9.81 m/s^2

2.2 운동방정식 유도

카트의 수평방향의 힘을 합산하면 아래 식과 같다.

$$M\ddot{x} + N = F \tag{1}$$

진자 변위(x_p)는 카트의 이동변위(x)와 진자의 회전에 의한 변위를 더한 값과 같다.

즉 $x_p = x + l\sin\theta$ 와 같은 식이 나온다.

진자에 대한 수평방향의 힘을 정리한다. 그러면 다음과 같은 (2)식를 얻는다.

$$N = m\frac{d^2 x_p}{dt^2} = m\frac{d^2}{dt^2}(x + \sin\theta) \tag{2}$$

마찬가지로 진자의 모멘트 운동의 힘을 정리하면 식(3)을 얻을 수 있다.

$$\begin{gathered} \sum M = J\ddot{\theta},\ \ J = ml^2 \\ ml^2\ddot{\theta} = m\ddot{x}l\cos\theta - mgl\sin\theta - b\dot{\theta} \end{gathered} \tag{3}$$

식(1)과식(2)로부터 N을 제거하여 정리하면 식(4)를 얻을 수 있다

$$F = m\ddot{x} + \frac{d^2}{dt^2}(x + l\sin\theta) \tag{4}$$

이 제어 설계기법은 선형시스템에만 적용이 되기 때문에 방정식을 선형화할 필요가 있다.
수직 하향 평형위치를 선형화하면 θ=0, 그리고 이 시스템은 작은 구간에서 유지된다고 가정한다.
수직 하향 평형위치가 20°를 넘지 않으면 이 가정은 상당히 합리적이다. ∅는 수평에서 pendulum의 위치에 대한 편차라고 하자.
 우리는 평형으로부터 이 작은 편차를 식(3), 식(4)에 적용 할 수 있다. 다음 아래 식과 같다.

$$\cos\theta \approx 1$$
$$\sin\theta \approx \theta$$

다음으로 비선형 방정식에 위의 식을 넣으면 두 개의 선형방정식을 이용하여 가속도와 각 가속도를 구할 수 있다

$$F = M\ddot{x} + m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \tag{5}$$
$$ml^2\ddot{\theta} = m\ddot{x}l - mgl\theta - b\dot{\theta} \tag{6}$$

가속도를 구하기 위해서 식(6)을 l로 나눈 후 식(5)에 대입한 값을 이용해 구할 수 있다.
식(6)을 l로 나눈 값은 아래의 식과 같다

$$ml\ddot{\theta} = m\ddot{x} - mg\theta - \frac{b\dot{\theta}}{l}$$

위에 식 $ml\ddot{\theta}$를 식(5)에 대입을 하면, 카트의 가속도($\ddot{x}$)에 대한 운동 방정식(7)이 나온다.

$$F = (M+m)\ddot{x} + m\ddot{x} - mg\theta - \frac{b\dot{\theta}}{l} = (M+2m)\ddot{x} - mg\theta - \frac{b\dot{\theta}}{l}$$
$$\rightarrow (\mathrm{M}+2\,\mathrm{m})\ddot{x} = mg\theta + \frac{b\dot{\theta}}{l} + F$$
$$\rightarrow \ddot{x} = \frac{mg}{M+m}\theta + \frac{b}{l(M+2m)}\dot{\theta} + \frac{1}{M+2m}F \tag{7}$$

각 가속도는 식(5)의 $\ddot{x}$를 식(6)에 대입하여 구할 수 있다. 식(5)를 $\ddot{x}$로 정리하면 아래와 같다.

$$\ddot{x} = \frac{F - l\ddot{\theta}m}{M+m}$$

위의 식을 식(6)에 대입하면, 진자의 각가속도($\ddot{\theta}$)에 대한 운동방정식(8)이 나온다.

$$ml^2\ddot{\theta} = ml\left(\frac{F - ml\ddot{\theta}}{M+m}\right) - \mathrm{mg}\,l - \mathrm{b}\,\dot{\theta} = \frac{mlF}{M+2m} - \frac{(\mathrm{M+m})(\mathrm{mg}\,l)}{M+2m} - \frac{(\mathrm{b}\,\dot{\theta})(M+m)}{M+2m}$$
$$\rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\left(\frac{M+m}{M+2m}\right)\theta - \frac{b}{ml^2}\left(\frac{M+m}{M+2m}\right)\dot{\theta} + \frac{1}{l(\mathrm{M}+2\,\mathrm{m})}F \tag{8}$$

2.3상태방정식(state-space)

일반적인 상태방정식은 아래 식(9)와 같다.

$$\dot{X} = AX + Bu \qquad \text{여기서,} \; X = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \; \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} x \\ \theta \end{bmatrix}, \; \mathrm{u} = [F] \tag{9}$$
$$Y = CX + Du$$

여기서 X, Y, U는 벡터이고 A, B, C, D는 행렬이다.
미분방정식이 연속적이라면 이 운동선형방정식들은 state-place로 대체가 가능하다. 위 방정식들은 선형이기 때문에 아래와 같은 표준행렬로 나타낼 수 있다. 여기서 u는 입력값(F)이다. 운동방정식(7),(8)을 상태방정식(State-space)형태(9)로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{mg}{M+2m} & \dfrac{b}{l(\mathrm{M}+2m)} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-g}{l}(\dfrac{M+m}{M+2m}) & \dfrac{-b}{ml^2}(\dfrac{M+m}{M+2m}) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{M+2m} \\ 0 \\ \dfrac{1}{l(\mathrm{M}+\mathrm{m})} \end{bmatrix} u \tag{10}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

2.4제어기 설계하기

식(9) 또는 식(10)에서 입력값(제어기) u에 식(11)를 대입한다. 식(11)에서 K는 제어상수이며 제어상수에 따라 시스템의 안정성이 좌우된다. 변수 K는 식(12)과 같다.

$$u = -KX = -(\mathrm{k}_{p1}\, x + \mathrm{k}_{d1}\, \dot{x} + k_{p2}\theta + \mathrm{k}_{d2}\, \dot{\theta}) \tag{11}$$

$$K = \begin{bmatrix} k_{p1} \\ k_{d1} \\ k_{p2} \\ k_{d2} \end{bmatrix} \tag{12}$$

여기서 k_{p1}, k_{d1}은 각각 진자의 각도와 각속도에 대한 제어상수이며, k_{p2}, k_{d2}는 각각 카트의 위치와 속도에 대한 제어상수이다.식(10)의 상태방정식에 식(11)를 대입하여 정리하면 상태방정식(10)은 식(13)과 같다.

$$\dot{X} = (A - BK)X \tag{13}$$

식(13)에서 (A-BK)가 negative definite이면 시스템은 안정하다. 다시 말해 제어상수 K를 사용하였을 때 진자가 쓰러지지 않고 안정하게 서있는다.(A-BK)가 negative definite인지 확인하는 방법은 (A-BK)의 eigen value를 구하여 이 값이 모두 음수이면 (A-BK)은 negative definite이다. 3x3행렬부터는 eigen value(고유값)를 손으로 구하기 어려우므로 컴퓨터를 이용하여 계산한다.
eigen value는 시스템의 안정성 및 수렴속도와 관련 있다. Eigen value의 절대값이 클수록 시스템이 빨리 안정화된다. 만약Eigen value가복소수이면 시스템에 진동이 발생한다.
(Root locus 상에서의 pole, zero 위치와 시스템응답과의 관계 참조; 자세한 점은 시스템 제어 서적 참조)
(eigen value 구하는 방식은 $\mathrm{AX} = \lambda \mathrm{X} \rightarrow \lambda \mathrm{I} - \mathrm{A} = 0$을 만족하는 λ값을 구하는 것)

2.5시뮬레이션

진자 카트 시스템 시뮬레이션은 랩뷰(Labview)프로그램으로 진행한다. LabVIEW는 테스트, 컨트롤 및 측정 어플리케이션을 개발하는 엔지니어와 과학자들을 위해 National Instrument사에서 제작한 그래픽 기반 프로그래밍 언어이다. 이 실험에서는 진자 카트 시스템 시뮬레이션을 위해 다음의 파일을 활용한다.(파일위치:바탕화면>" pendulum control Labview application"폴더), 참고로 시뮬레이션 설치 화일은 http://robot.hanbat.ac.kr/index.php/lecture/mech-lab/ 에서 다운로드 받을 수 있다.

1. "pendulum Application.exe": 시뮬레이션 진행
2. "Controller design from state space Application.exe": 제어기 설계

1. "pendulum Application.exe"파일

pendulum Application파일을 실행하면 아래의 창이 뜨며 각 요소에 대한 설명은 Figure 2와 같다.

1."**시스템 변수 입력창**"에 진자 카트의 변수를 입력한다. 각 변수 값들은 다음의 범위 내에서 선정한다.

진자의무게(kg)	진자중심까지거리(m)	마찰계수(N/m/s)	카트무게(kg)
0.1~2	0.1~1	0.1~1	0.1~5

진자의 관성 모멘트는 진자의 끝 점에 대한 막대기의 관성 모멘트 식(14)으로부터 구한다.

$$I_{end} = \frac{1}{3} ml^2 \tag{14}$$

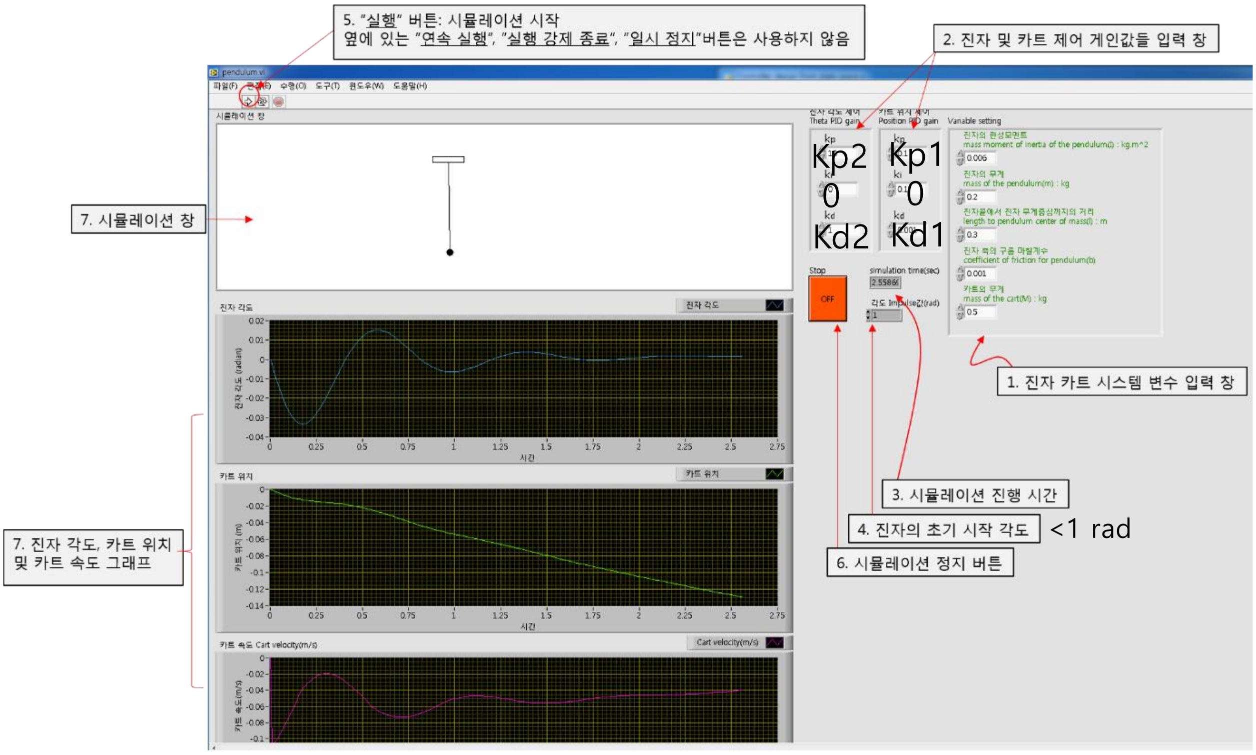


Figure 2. Pendulum Application진자 카트 시뮬레이션 창

여기서 선정한 변수들과 식(9)로부터 진자 카트 시스템의 상태방정식을 구할 수 있다.

2."**<u>진자 및 카트 제어 게인 입력 창</u>**"에는 진자의 각도와 카트 위치를 제어하기 위한 제어 상수를 입력한다. 이 제어 상수의 설계 여부에 따라 시스템의 안정성이 좌우된다. 제어 상수를 설계하기 위해 "Controller design from state space Application"파일을 사용하자.

3."**<u>시뮬레이션 진행 시간</u>**"인디케이터는 시뮬레이션이 진행된 시간을 보여준다. 시뮬레이션의 진행 시간은 60초이다.
4."**<u>진자의 초기 시작 각도</u>**"는 시뮬레이션이 시작할 때 진자가 기울어져있는 각도이다. 이 값이 0이면 시뮬레이션이 진행되지 않으므로 0.1~1 범위내에서 선정한다.

5."**<u>실행 버튼</u>**"은 시뮬레이션에 필요한 변수들과 제어상수를 모두 입력한 후 시뮬레이션을 실행하고자 할 때 클릭한다.

6."**<u>시뮬레이션 정지 버튼</u>**"은 시뮬레이션이 진행 중에 끝내고 싶을 때 누르면 된다. 이 버튼을 누르지 않아도 시뮬레이션이 시작되고 60초가 지나면(여기서 60초는 실제 시간이 아닌 시뮬레이션상의 60초) 자동으로 시뮬레이션은 끝난다.

7."**<u>시뮬레이션 창</u>**"은 진자 카트의 움직임을 보여준다. "**<u>진자 각도, 카트 위치, 카트 속도 그래프</u>**"는 진자의 각도와 카트의 움직인 거리 및 카트의 속도 변화를 보여준다.

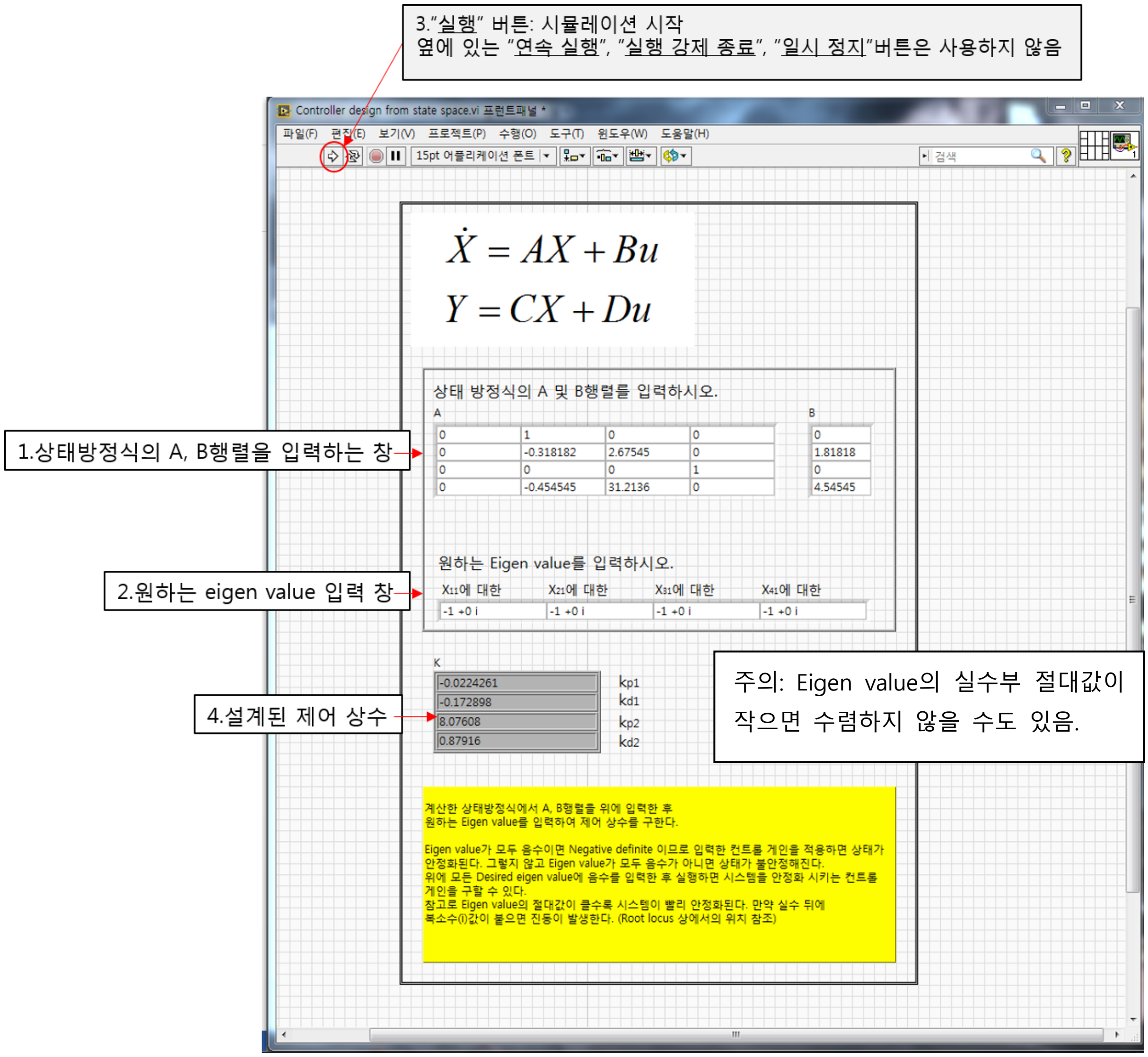


Figure 3. Controller design from state space Application창

2. "Controller design from state space Application.exe"파일

Controller design from state space Application파일을 실행하면 다음(Figure 3)과 같은 창이 뜬다.

1., "**<u>상태방정식의 A, B행렬을 입력하는 창</u>**"에 위에서 선정한 변수들과 식(9)를 이용하여 구한 상태방정식의 A, B행렬을 입력한다.

2. "**<u>원하는 eigen value 입력 창</u>**"에 원하는 eigen value를 입력한다. 모든 eigen value의 실수가 **음수**여야 시스템이 안정화된다.

각각의 eigen value는 상태방정식의 X행렬의 원소들과 관련이 있다. 즉 X_{11}에 대한 Eigen value는 카트의 위치(x), X_{21}에 대한 Eigen value는 카트의 속도(x'), X_{31}에 대한 Eigen value는 진자의 각도(θ), X_{41}에 대한 Eigen value는 진자의 각속도(θ')에 대한 것이다.

Eigen value의 절대값이 커질수록 관련된 X행렬의 원소는 빨리 안정화된다. 즉 원하는 값으로 빨리 수렴한다. 예를 들어, X_{31}원소와 관련된 eigen value의 절대값이 커지면 X_{31}원소 즉 진자의 각도(θ)는 다른 원

소들에 비해 빨리 안정화된다.

만약 Eigen value를 실수가 아닌 복소수로 입력하면 시스템에 진동이 생긴다. 아래는 eigen value의 실수와 복소수 형태의 예시이다. 복소수로 입력할 때는 켤레복소수로 입력해야 한다. 다시 말해 음수(-)와 양수(+)부호가 짝이 맞도록 입력해야 한다.

(Eigen value에 대한 더 자세한 내용은 공업수학책이나 인터넷 자료 참조)

EX 1.) Eigen value값이 실수인 경우 입력방법

원하는 Eigen value를 입력하시오.

X_{11}에 대한	X_{21}에 대한	X_{31}에 대한	X_{41}에 대한
-1 +0 i	-1 +0 i	-1 +0 i	-1 +0 i

EX 2.) Eigen value 값이 복소수인 경우 입력방법

원하는 Eigen value를 입력하시오.

X_{11}에 대한	X_{21}에 대한	X_{31}에 대한	X_{41}에 대한
-1 -10 i	-1 +10 i	-1 -10 i	-1 +10 i

3. "**실행 버튼**"은 상태방정식의 A, B행렬과 Eigen value까지 모두 입력한 후 클릭하여 프로그램을 실행한다.

4. "설계된 제어 상수 창"에 설계된 제어 상수들이 출력된다**.** 이 제어 상수들을 시뮬레이션 창(Figure 2"Pendulum Application.exe"진자 카트 시뮬레이션 창)의 "진자 및 카트 제어 게인값들 입력 창"에 입력한 후 시뮬레이션 창의 "실행 버튼"을 클릭하여 시뮬레이션을 실행한다.

마지막으로 시뮬레이션을 수행하고 보고서를 제출한다.

(3) 참조문헌

1. http://ctms.engin.umich.edu/CTMS/index.php?example=InvertedPendulum&section=SystemModeling

실험 보고서

실험일자:	학번:	반:	성명:

1. 시뮬레이션을 위해 선정한 파라미터를 기입하시오.

카트 무게, M (kg)	진자 무게, m (kg)	진자 마찰계수, b	진자 길이의 절반. l (m)	초기 진자 각도, θ (rad) (<1)

2. 위 물리변수를 식(10)에 대입하여 진자-카트 시스템의 상태방정식 행렬 A와 B를 계산하시오.

3. LabVIEW 프로그램을 이용하여 제어 상수(kp, kd) 또는 Eigen value값을 변화시키며 진자와 카트의 움직임을 관찰하고 다음 표를 작성하시오. 그리고 Figure 4 위에 진자 각도(1차~3차)를 스케치하시오. (Hint: k_p, k_d값의 작은 변화는 제어 결과의 차이가 미비하므로 값을 크게 변화시키며 실험을 진행할 것.

   아래에서 진자의 정지시간은 진자의 각도 변화가 거의 0에 가까워졌을 때의 시간, Figure 4참조. 운동 횟수는 θ값의 부호 변화를 확인하라 (Figure 4참조). 카트의 최대 이동거리는 초기위치에서 가장 멀리 떨어졌을 때의 값 고려.)

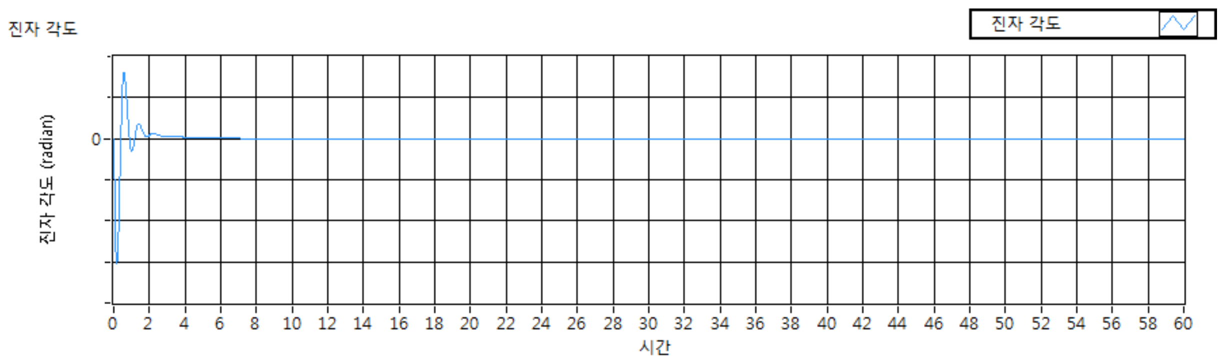


Figure 4. 진자 각도의 변화

예를 들어 진자 각도의 움직임이 Figure 4와 같다면, 진자의 정지시간은 대략 4초, 진자의 운동횟수는 약 2회이다.

<table>
<tr><th></th><th colspan="4">k_p, k_d값</th><th>진자 정지시간(s)</th><th>진자 왕복횟수 (사인파의 개수)</th><th>카트 최대이동거리(m) 및 최대속도 (절대값 고려)</th></tr>
<tr><td rowspan="3">1차</td><td>k_{p1}</td><td></td><td>k_{d1}</td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>k_{p2}</td><td></td><td>k_{d2}</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">Eigen values =</td></tr>
<tr><td rowspan="3">2차</td><td>k_{p1}</td><td></td><td>k_{d1}</td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>k_{p2}</td><td></td><td>k_{d2}</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">Eigen values =</td></tr>
<tr><td rowspan="3">3차</td><td>k_{p1}</td><td></td><td>k_{d1}</td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>k_{p2}</td><td></td><td>k_{d2}</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="7">Eigen values =</td></tr>
</table>

4. 위 실험에서 Eigen value가 변함에 따라 제어상수, 정지시간, 왕복 횟수, 카트 이동거리 및 속도에 어떠한 영향 또는 변화가 있는지 설명하라.