

## 2자유도 로봇팔 궤적 계획 (Trajectory planning of a two-link manipulator robot)

### (1) 실험목적과 절차

이번 실험에서는 두 개의 링크를 갖는 로봇팔의 끝점을 주어진 초기 위치에서 최종 위치로 이동시키기 방법을 이론과 시뮬레이션을 통해 실습한다.

#### (1-1) 절차

두 개의 링크를 갖는 로봇팔의 끝점을 주어진 초기 위치에서 최종 위치로 이동시키기 위한 제어 순서는 다음과 같다.

- 1- 모델링(forward kinematic model): 로봇의 운동학(기구학) 모델을 구한다. 즉 로봇 끝점의 위치(좌표)를 조인트 각도의 함수로 표현한다.
- 2- 역기구학(inverse kinematics): 절차 1의 모델을 이용하여 조인트 각도를 로봇 끝점 좌표의 함수로 구한다.
- 3- 궤적 경로 계획(trajjectory planning): 먼저 주어진 로봇팔 끝점의 초기 위치와 최종 위치로부터 해당 조인트 각도를 구한다. 그리고 주어진 작동시간 및 속도 조건을 사용하여 로봇의 궤적 경로를 계획한다.
- 4- 제어(control): 제어기를 설계하여 로봇팔이 절차 3에서 계획한 궤적 경로를 추종하도록 제어한다.

본 실험에서는 절차 4의 제어기 설계를 생략하고 절차 3에서 계획한 궤적 경로를 따라 로봇팔이 동작하도록 시뮬레이션한다.

### (2) 실험

#### (2-1) 모델링

본 실험에서 제어할 로봇팔의 기구학적 모델은 Figure 1과 같다.

Figure 1은 두 개의 링크 즉, 링크1과 링크2를 갖는 2자유도 로봇팔이다. Figure 1에서  $\theta_1$ 은 링크1과 x축이 이루

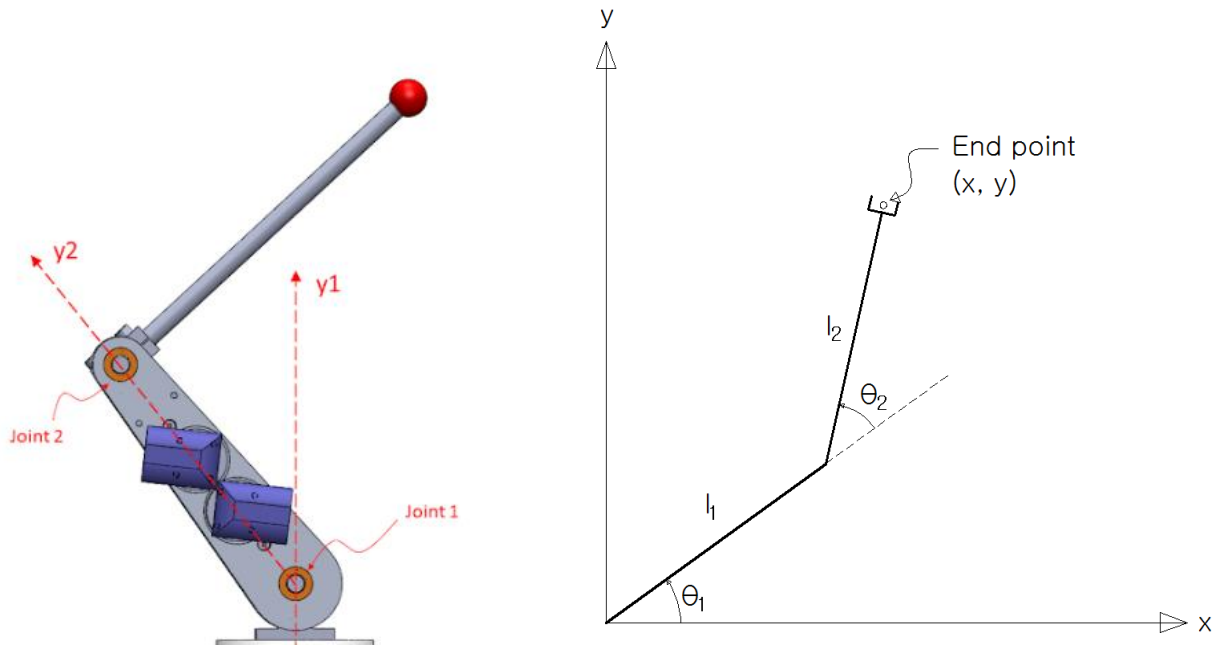


Figure 1 Kinematics of a two-link robot arm

는 각도이며  $\theta_2$ 는 링크2와 링크1이 이루는 각도이다.  $l_1$ 과  $l_2$ 는 각각 링크1과 링크2의 길이이다. Figure 1에서 로봇팔의 끝점 좌표(x, y)를  $l_1, l_2$  와  $\theta_1, \theta_2$ 에 대해 표현하면 다음과 같다.

$$x = l_1 c_1 + l_2 c_{12} ; \quad c_1 = \cos(\theta_1), \quad c_{12} = \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (1)$$

$$y = l_1 s_1 + l_2 s_{12} ; \quad s_1 = \sin(\theta_1), \quad s_{12} = \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (2)$$

### (2-2) 역기구학 구하기

로봇팔의 끝점 좌표(x, y)가 주어졌을 때  $\theta_1, \theta_2$ 의 값을 계산하는 수식을 위 식으로부터 유도할 수 있다.

#### 1) $\theta_2$ 에 대한 수식 구하기

우선, 식(1), (2)를 제곱하고 합한 후  $c_2$ 에 대해 정리하면 다음과 같다.

$$c_2 = \frac{x^2 + y^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2} \quad (3)$$

위 식을 참고로  $s_2$ 에 대한 표현은 다음과 같다.

$$s_2 = \pm\sqrt{1-c_2^2} \tag{4}$$

다음으로, 식(3), (4)로 부터 arc tan 기호를 사용하여  $\theta_2$ 를 계산하다.

$$\theta_2 = \text{Atan2}(s_2, c_2) = \text{Atan2}\left(\pm\sqrt{1-\left(\frac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}\right)^2}, \frac{x^2+y^2-l_1^2-l_2^2}{2l_1l_2}\right) \tag{5}$$

여기서 Atan2는 다음과 같이 계산한다[1] (참고: 각도의 단위는 라디안(rad)으로 계산한다.)

계산기의 단위가 라디안(rad)일 때

$$\text{atan2}(y, x) \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{if } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0, \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0, \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0, \end{cases}$$

(단위: rad)

계산기의 단위가 도(°)일 때

$$\text{atan2}(y, x) \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \times \frac{\pi}{180} & \text{if } x > 0, \\ \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 180^\circ\right) \times \frac{\pi}{180} & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0, \\ \left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right) - 180^\circ\right) \times \frac{\pi}{180} & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0, \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0, \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0, \end{cases}$$

(단위: rad)

참고: 도(°) 단위의 값을 라디안(rad) 단위로 변환하려면, 도(°) 단위의 값에  $\frac{\pi}{180}$  을 곱해준다.

## 2) $\theta_1$ 에 대한 수식 구하기

다음으로 식(1), (2)로부터  $\theta_1$ 에 대한 역기구학을 구한다. 식(1), (2)를 아래의 삼각함수 공식을 사용하여 정리하면 식(7)과 같다.

$$\begin{aligned} c_{12} &= c_1c_2 - s_1s_2 \\ s_{12} &= c_1s_2 + s_1c_2 \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \cos(\gamma + \theta_1) &= x \\ \sin(\gamma + \theta_1) &= y \end{aligned} \tag{7}$$

여기서,  

$$\gamma = \text{Atan2}(l_2 s_2, l_1 + l_2 c_2)$$

식(7)의 두 변수를 arc tan로 표현하면 다음을 얻는다.

$$\gamma + \theta_1 = \text{Atan2}(y, x) \tag{8}$$

그리하여

$$\theta_1 = \text{Atan2}(y, x) - \text{Atan2}(l_2 s_2, l_1 + l_2 c_2) \tag{9}$$

로봇팔 끝점의 초기 위치(x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>)와 최종 위치(x<sub>f</sub>, y<sub>f</sub>)가 주어졌을 때 식(5)와 (9)를 사용하여 각 위치좌표에 대한 링크1과 링크2의 조인트 각도를 구할 수 있다. 위 식들의 유도 방법에 대한 자세한 내용은 참조자료[2]를 참고한다.

### (3) 궤적 경로 계획

다음으로 Figure 1의 로봇팔 끝점을 초기 위치에서 최종 위치로 이동시키기 위한 경로를 생성해보자. 본 실험에 서는 Cubic polynomial 방식을 사용하여  $\theta_1, \theta_2$ 의 경로를 각각 생성한다. Cubic polynomial 공식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \theta(t) &= a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \\ \text{여기서,} \\ a_0 &= \theta_i, \quad a_1 = \dot{\theta}_i, \quad a_2 = \frac{3(\theta_f - \theta_i) - t_f(2\dot{\theta}_i + \dot{\theta}_f)}{t_f^2}, \quad a_3 = \frac{2(\theta_i - \theta_f) - t_f(\dot{\theta}_f + \dot{\theta}_i)}{t_f^3} \end{aligned} \tag{10}$$

위 식에서 각 변수들에 대한 설명은 아래 표에 정리한다. 식(10)에 대한 자세한 내용은 참조자료[3]를 참고한다.

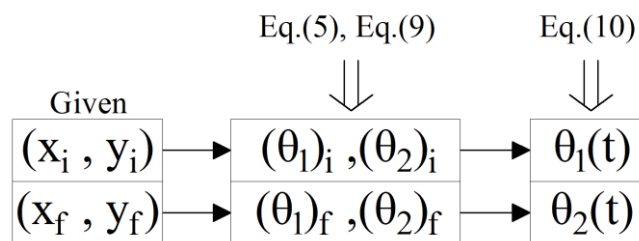
$\theta_i$	초기 각도
$\dot{\theta}_i$	초기 각속도
$\theta_f$	최종 각도
$\dot{\theta}_f$	최종 각속도
$t_f$	최종 목표점에 도달할 때까지 걸리는 시간(sec)

**(4) 시뮬레이션**

(2)절에서 구한 역기구학과 (3)절에서 구한 경로를 이용하여 로봇팔의 시뮬레이션을 진행한다. 로봇팔을 시뮬레이션하는 순서는 다음과 같다.

로봇팔 끝점의 초기좌표와 최종좌표가 주어졌을 때 식(5)와 식(9)로부터 각 좌표에 대한 조인트 각도를 구한다. 다음으로 식(10)을 사용하여 조인트1과 조인트2에 대한 각도 경로를 생성한다. 이렇게 생성된 경로를 로봇팔에 입력하여 로봇팔을 초기좌표에서 최종좌표로 움직인다.

(4-1) 랩뷰에서 시뮬레이션하기



**Figure 2**

제공된 설치파일을 설치 후 설치 경로에 들어가면 Application 파일이 있다. 이 Application 파일을 실행하면 아래의 창이 뜨며 "설정", "시뮬레이션", "결과" 탭을 순서대로 설정하여 시뮬레이션을 진행한다.

**A. "설정" 탭**

- 1- Figure 3에 표시된 "설정" 탭을 클릭하고 'Cubic Polynomial'에 식(10)을 통해 구한 조인트1, 2에 대한  $a_0, a_1, a_2, a_3$  을 입력한다.

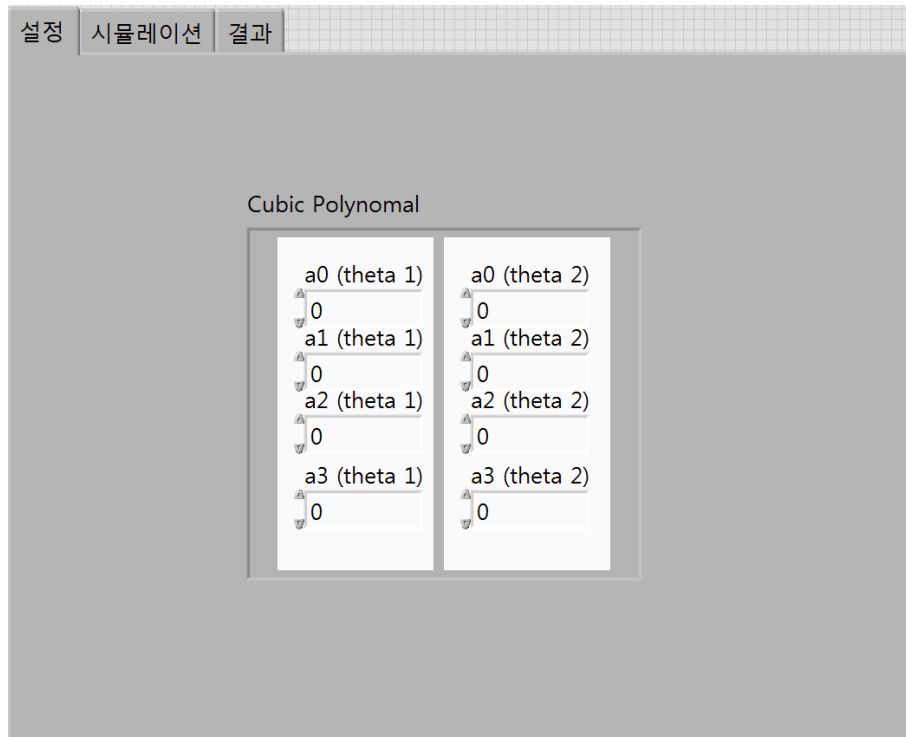


Figure 3

B. "시뮬레이션" 탭

- 1- "시뮬레이션" 탭을 클릭하면 Figure 5와 같다. 여기서 'start' 버튼을 클릭하면 로봇팔의 시뮬레이션이 시작된다.

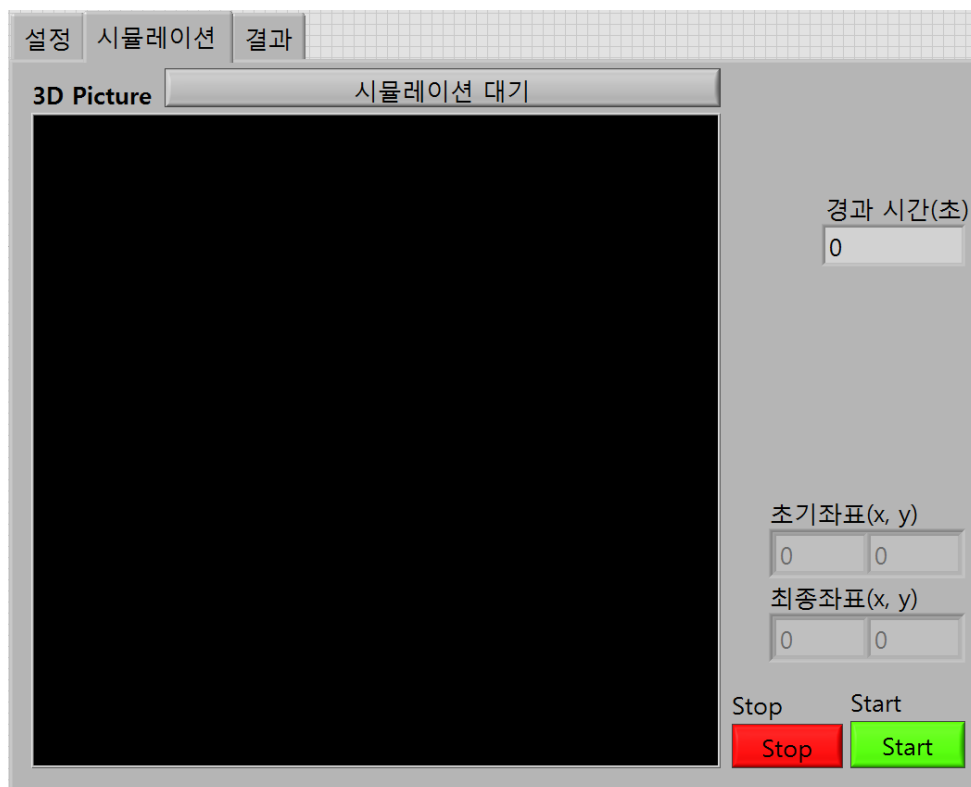


Figure 4

## C. "결과" 탭

- 1- 시뮬레이션이 완료되면 "결과" 탭에서 시뮬레이션 결과 그래프를 볼 수 있다. 조인트1, 2의 각도, 각속도, 각가속도를 볼 수 있다.

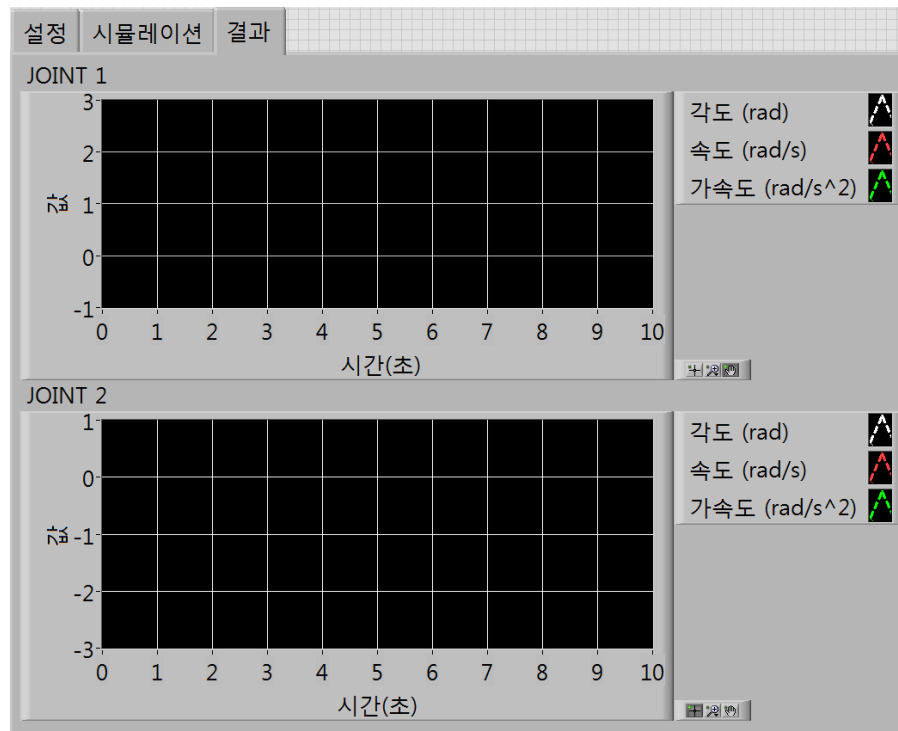


Figure 5

## 참조 자료

- [1] Available: <https://en.wikipedia.org/wiki/Atan2>
- [2] J. J. Craig, "로보틱스 입문(3판)," ed: Pearson Education Korea, 2005, pp. 146-148.
- [3] P. D. Richard R. Lindeke. (2012). Available: [http://www.d.umn.edu/~rlindek1/ME4135\\_11/Robotic Path Control Techniques\\_F12.pptx](http://www.d.umn.edu/~rlindek1/ME4135_11/Robotic Path Control Techniques_F12.pptx)

# 보고서

실험일자: \_\_\_\_\_ 년 월 일 학번: \_\_\_\_\_ 반/팀: \_\_\_\_\_ 성명: \_\_\_\_\_

로봇팔의 사양이 Table 1과 같을 때 랩뷰로 시뮬레이션을 진행하고 아래의 보고서를 작성하라.

**Table 1** 로봇팔의 사양 및 궤적 정보

링크1 길이( $l_1$ )	0.5 m
링크2 길이( $l_2$ )	0.5 m
끝점의 초기좌표( $x_i, y_i$ )	(1 m, 0 m)
초기좌표에서의 조인트1과 조인트2의 각속도	0 rad/s
끝점의 최종좌표( $x_f, y_f$ )	<b>Table 2 참조</b>
최종좌표에서의 조인트1과 조인트2의 각속도	0 rad/s
초기좌표에서 최종좌표로 이동하는데 걸린 시간( $t_f$ )	10초

**Table 2** 로봇팔 끝점의 최종 좌표 (단위: m)

팀	최종 좌표	팀	최종 좌표
1	(0.5, 0)	11	(0.1, 0.9)
2	(0.5, 0.75)	12	(0.2, 0.8)
3	(0.75, 0.5)	13	(0.3, 0.7)
4	(0.5, 0.5)	14	(0.6, 0.4)
5	(0.5, 0.25)	15	(0.7, 0.3)
6	(0.25, 0.5)	16	(0.8, 0.2)
7	(0.25, 0.75)	17	(0.9, 0.1)
8	(0.75, 0.25)	18	(0.55, 0.55)
9	(0.4, 0.6)	19	(0.65, 0.65)
10	(0, 0.5)	20	(0.75, 0.75)

- 1) 식(5), (9)와 위의 초기 및 최종 좌표를 이용하여  $\theta_1, \theta_2$ 의 초기 각도와 최종 각도를 구하여라. (참고: 각도의 단위는 라디안(rad)이며 식(4)의 부호는 +로 계산한다.)

조인트1 각도, $\theta_1$ (rad)		조인트2 각도 $\theta_2$ (rad)	
초기각 $\theta_i$ :	최종각 $\theta_f$ :	초기각 $\theta_i$ :	최종각 $\theta_f$ :

- 2) 식(10)을 사용하여 조인트 궤적 함수  $\theta_1(t)$ 와  $\theta_2(t)$ 의 각 계수  $a_0, a_1, a_2, a_3$ 를 계산하여라.

$\theta_1$		$\theta_2$	
$a_0$ :	$a_1$ :	$a_0$ :	$a_1$ :
$a_2$ :	$a_3$ :	$a_2$ :	$a_3$ :



3) 랩뷰에서 로봇팔을 시뮬레이션하고 각 조인트의 각도, 속도, 가속도("JOINT1", "JOINT2")를 대략적으로 스케치하여라. (최대, 최소 등 특징 값들과 해당 시간을 대략적으로 표시하라.)

4) 식(4)의 부호를 -로 계산하였을 때, 10초 후 로봇팔의 최종 모습을 스케치하고 +로 계산하였을 때와 어떤 차이가 있는지 설명하라.